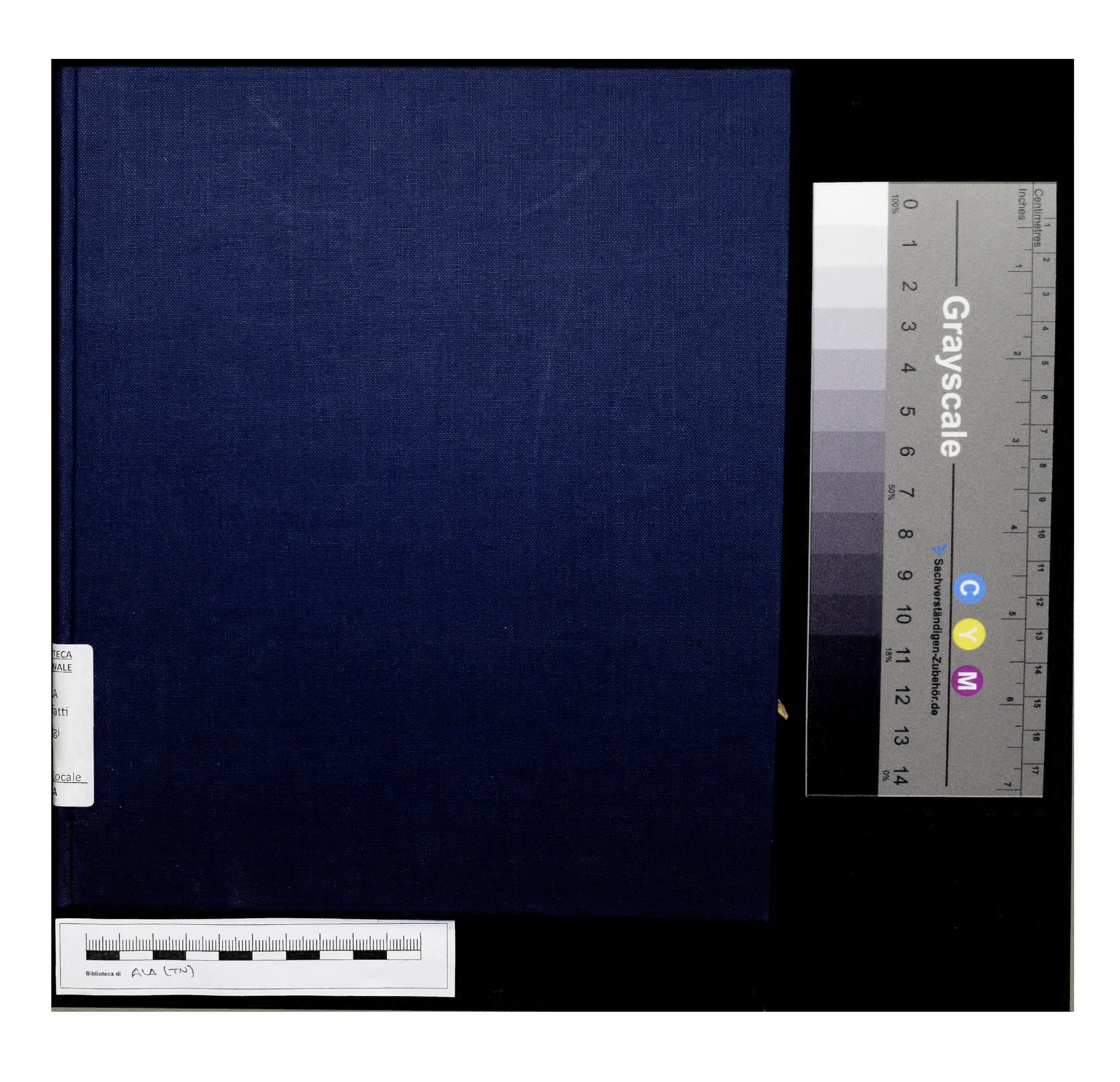

TECA
NALE
A
Fatti
gi
ocale
A
Centimetres
Inches
Grayscale
Sachverständigen-Zubehör.de
C
Y
M
Biblioteca di ALA (TN)



Beiträge

zum

MALFATTISCHEN PROBLEM

und zu den

Verallgemeinerungen desselben.

Von

Zornow.



Königsberg, 1835.

Gedruckt in der Degenschen Buchdruckerei.

Ueber das Malfattische Problem.

Unter den geometrischen Problemen, welche in neuerer Zeit ein allgemeineres Interesse erregt haben, nimmt dasjenige, welches unter dem Namen des Malfattischen bekannt ist, keinen unwürdigen Platz ein.

Schon im Jahre 1802 stellte Gianfrancesco Malfatti, Professor am Lyceum in Ferrara folgende Aufgabe:

Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia como di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza [1].

Malfatti gab zugleich einen einfachen algebraischen Ausdruck für den Radius der Grundfläche eines jener drei Cylinder, nehmlich:

$$x = \frac{r}{2s}(A - V + S - T),$$

worin $A = \frac{s.\,t.\,u}{r^2} - r$ ist, und die Bedeutungen der vorkommenden Grössen folgende sind:

r ist der Radius des Kreises, der in das Dreieck beschrieben ist, welches die Grundfläche des Prisma's vorstellt,

s, t, u sind die Abstände der Berührungspunkte von den Ecken des Dreiecks, und

S, T, und V die Abstände des Mittelpunktes von den Ecken.

Die französischen Mathematiker Gergonne und Thomas - Lavernède gaben 1811 einen bei weitem complicirteren Ausdruck für jenen Radius, und schicken ihrer Auflösung mit edler Freimüthigkeit die Worte voraus: [2])

Il y a plus de dix ans que ce difficile problème s'est offert pour la première fois, aux rédacteurs de ce recueil; mais, bien qu'ils l'aient attaqué un grand nombre de fois, ils n'ont pu, pendant long-temps, parvenir à le resoudre, ni même à s'assurer, s'il étoit résoluble par la ligne droite et le cercle.

---

1) Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Szienze tomo X. parte I. 1803. pag. 235.

2) Annales de Mathematiques etc. Tom. I. pag. 343.

In dem berühmten eben angeführten Journale findet sich die Aufgabe kürzer gefasst in den Worten:

A un triangle donné quelconque inscrire trois cercles de manière que chacun d'eux touche les deux autres et deux côtés du triangle?

So sehr hiedurch das Interesse der Geometer geweckt wurde, so fanden doch erst Herr Lehmus [3]) und Herr Crelle [4]) den Weg auf, welcher zu Malfatti's Ausdruck führt, aber eine rein-geometrische Construction der Aufgabe, die mit den früheren Lösungen nichts gemein hatte, gab zuerst Herr Steiner [5]), und zwar eine Construction von unnachahmlicher Schönheit, da sich schwerlich eine elegantere denken lässt.

Aber wie Malfatti's algebraischer Ausdruck den cisalpinischen Geometern lange ohne Beweis geblieben war, (die Memoiren der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften, in denen Malfatti seinen Ausdruck entwickelt hat, sind sehr selten), also auch die Steinersche rein-geometrische Construction.

Herr Steiner construirte zugleich die schon von Gergonne verallgemeinerte Aufgabe nehmlich: Drei Kreise zu beschreiben, welche sich unter einander berühren, und von denen jeder noch zwei von drei gegebenen berührt; er übertrug dann die Aufgabe und seine Construction auf die Kugel, indem er drei beliebige Kugelkreise als gegeben betrachtete, und die drei Kreise construirte, von welchen jeder die beiden andern und zwei der gegebenen berührt, und dehnte endlich auf Oberflächen der zweiten Ordnung überhaupt seine schöne Construction aus.

Einen ziemlich einfachen Beweis jener Steinerschen Construction der ursprünglichen Malfattischen Aufgabe habe ich im 10ten Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik v. Crelle zuerst bekannt gemacht, und in einer Abhandlung von früherem Datum im zweiten Hefte des 11ten Bandes desselben Journals überzeugte sich Herr Plücker durch eine weitläufige Rechnung von der Richtigkeit der Steinerschen Construction der ursprünglichen Malfattischen Aufgabe. Im vierten Hefte desselben Bandes zeigte er, wie man, vermittelst eines neuen merkwürdigen Uebertragungsprincips das verallgemeinerte Problem, wenn statt der Graden Kreise in der Ebne gegeben sind, auf den Fall zurückführen könne, wo die Kreise gleich sind, und deutete an, dass sich dieser Fall durch eine ähnliche Rechnung würde beweisen lassen.

Statt diesen Weg einzuschlagen werde ich zuerst die Steinersche Construction der Aufgabe: „Auf der Kugeloberfläche drei kleine Kreise zu construiren, welche sich unter einander berühren, und von denen jeder zwei Seiten eines gegebenen sphärischen Dreiecks berührt" beweisen, bei welchem Beweise die nicht zu vermeidende Rechnung auf wenige Zeilen reduzirt ist. Der Gang dieses Beweises hat mit dem schon früher von mir für die Ebene gegebenen

---

3) Lehmus Lehrbuch der Geometrie. 2 B. S. 182. 1820.
4) Sammlung mathematischer Aufsätze von Crelle. B. 1. S. 146. 1821.
5) Journal f. r. u. a. Mathematik von Crelle. B. 1. H. 2. S. 178.

eine offenbare Analogie. Dann werde ich von diesem Beweise zu der Aufgabe in der Ebene, wenn statt der Geraden Kreise gegeben sind übergehn, und von dieser zu der Beweisführung der Steinerschen Construction der allgemeinen Kugelaufgabe kommen.

Zu diesen Beweisführungen bedürfen wir einiger Sätze der Sphärik, da aber bereits viel für sphärische Geometrie geschehn ist, so will ich mich begnügen diese Sätze hier, ohne die ihnen eigentlich zukommenden allgemeineren Beziehungen, kurz zusammen zu stellen.

Ein grösster Kreis auf der Kugeloberfläche entspricht in vielfacher Beziehung der Geraden in der Ebene, daher soll derselbe im Folgenden durch sphärische Gerade bezeichnet werden, und alle zu gebenden sphärischen Figuren, werden wir so darstellen, dass die sphärischen Geraden durch ebene Geraden vorgestellt sind.

A. Sätze auf der Kugeloberfläche.

I. Wenn auf der Kugeloberfläche zwei sphärische Gerade Mm und AN [Fig. 1.] aufeinander senkrecht sind, so ist für jeden beliebigen Punkt A des Perpendikels AN, wenn m und M fest bleiben:

$$\frac{\text{Cos.AM}}{\text{Cos.Am}} = \frac{\text{Cos.MN}}{\text{Cos.mN}}$$

Sind M und m feste Punkte, so ist $\frac{\text{Cos.MN}}{\text{Cos.mN}}$ eine Constante und daher gilt umgekehrt:

Alle Punkte A, welche dieser Bedingung Genüge leisten, liegen in einer sphärischen Geraden, welche auf Mm senkrecht ist. Ferner:

II. Hat man auf der Kugel einen Kreis M mit dem Radius R [Fig. 2. u. 3.] und einen willkürlichen Punkt A, aus diesem eine sphärische Tangente AB, und eine sphärische Secante ACE an den Kreis, so ist, wenn man noch auf die Secante aus dem Mittelpunkt des Kreises einen Perpendikel MD fällt:

1) Wenn der Punkt A ausserhalb des Kreises liegt:

$$\text{Cos.AB} = \frac{\text{Cos.DA}}{\text{Cos.DE}} = \frac{\text{Cos.AM}}{\text{Cos.R.}}$$

2) Wenn der Punkt A innerhalb des Kreises liegt:

$$\text{Cos.AB} = \frac{\text{Cos.DE}}{\text{Cos.DA}} = \frac{\text{Cos.R.}}{\text{Cos.AM}}$$

wobei im letzten Falle AB die halbe kürzeste sphärische Sehne durch den Punkt A in Bezug auf den gegebenen Kreis ist.

Setzt man im ersten Falle:

$$\text{AE} = \text{AD} + \text{DE} = 2s$$
$$\text{AC} = \text{AD} - \text{DE} = 2d,$$

so hat man $$\mathrm{Cos.AB} = \frac{\cos.(s+d)}{\cos.(s-d).}$$

Setzt man im zweiten Falle

$$AE = DE + DA = 2s$$
$$AC = DE - DA = 2d$$

so hat man:

$$\mathrm{Cos.AB} = \frac{\cos.(s+d)}{\cos.(s-d)}$$

daher in beiden Fällen:

$$\cos.AB = \frac{1 - tg.s.\ tg.d}{1 + tg.s.\ tg.d.}$$

Da aber für eine andere sphärische Secante oder Sehne aus demselben Punkte A:

$$\cos.AB = \frac{1 - tg.s'.\ tg.d'}{1 + tg.s'.\ tg.d'}$$

gilt, so folgt:

$$tg.s.\ tg.d = tg.s'.\ tg.d'$$

wodurch die Analogie mit der Ebene noch mehr hervortritt.

Ist im ersten Falle DE = o, also auch EC = o, so wird s = d, und aus der Secante die Tangente AB

daher: $$tg.s.\ tg.d. = tg.^2\left(\frac{AB}{2}\right)$$

Ist im zweiten Falle AD = o, so wird s = d und aus jedem Sehnestück die halbe kürzeste Sehne AB, daher wieder:

$$tg.s.\ tg.d. = tg^2\left(\frac{AB}{2}\right)$$

Die Grösse $tg^2\left(\frac{AB}{2}\right)$ kann in beiden Fällen die sphärische Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis heissen.

III. Hat ein Punkt A [Fig. 4. u. 5.] zu zwei Kreisen M und m gleiche sphärische Potenz, so ist im ersten Falle:

$$tg^2\left(\frac{AB}{2}\right) = tg^2\left(\frac{Ab}{2}\right)$$

daher auch:

$$\mathrm{Cos.AB} = \mathrm{Cos.Ab}$$

oder:

$$\frac{\mathrm{Cos.AM}}{\mathrm{Cos.R}} = \frac{\mathrm{Cos.Am}}{\mathrm{Cos.r}}$$

woraus $$\frac{\mathrm{Cos.AM}}{\mathrm{Cos.Am}} = \frac{\mathrm{Cos.R}}{\mathrm{Cos.r}}$$ folgt;

und im zweiten Falle:

$$\mathrm{Cos.AB} = \mathrm{Cos.Ab}$$

oder:

$$\frac{\mathrm{Cos.R}}{\mathrm{Cos.AM}} = \frac{\mathrm{Cos.r}}{\mathrm{Cos.Am}}$$

woraus wieder:

$$\frac{\mathrm{Cos.AM}}{\mathrm{Cos.Am}} = \frac{\mathrm{Cos.R}}{\mathrm{Cos.r}} \text{ folgt;}$$

also in beiden Fällen:

$$\frac{\mathrm{Cos.AM}}{\mathrm{Cos.Am}} = \mathrm{Const.}$$

Daher muss (I.) der Punkt A in einer auf Mm senkrechten sphärischen Geraden liegen, diese ist eine sphärische Linie der gleichen Potenzen jener Kreise, und zwar entspricht dieser Bedingung (II.) bei zwei sich schneidenden Kreisen: die sphärische Gerade, welche gemeinschaftliche sphärische Secante der beiden Kreise ist, die wir betrachten, und bei zwei sich berührenden Kreisen: die sphärische Tangente, welche beide Kreise in ihrem Berührungspunkte berührt.

Da Mm die sphärische Centrale genannt werden kann, so kann man sagen:

Die sphärische Linie der gleichen Potenzen steht senkrecht auf der sphärischen Centralen.

Beschreibt man ferner aus einem Punkte A in der sphärischen Linie der gleichen Potenzen mit AB = Ab, welchen Bogen wir Potenzbogen nennen können, einen Kreis, so schneidet er die Kreise M und m rechtwinklich, also gilt auch umgekehrt:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise auf der Kugel, welche zwei gegebene rechtwinklich schneiden, ist jene sphärische Gerade, welche senkrecht auf Mm ist.

Sind zwei Punkte in dieser sphärischen Linie der gleichen Potenz Kugelpole von einander, und ihre Potenzbogen einander gleich, so fallen die Kreise, welche man mit diesen Potenzbogen beschreibt, beide mit der Centralen zusammen, und sind also zu einer sphärischen Geraden geworden; oder kürzer: die sphärische Centrale selbst ist einer von den rechtwinklich schneidenden Kreisen.

IV. Betrachtet man drei Kreise M_1, M_2, M_3 so folgt aus Obigem [6]):

Die drei sphärischen Linien der gleichen Potenzen dreier Kreise schneiden sich in zwei Punkten, die Kugelpole von einander sind, und die Punkte der gleichen Potenzen dieser drei Kreise genannt werden können. Diese beiden Punkte sind die Mittelpunkte des alle drei Kreise rechtwinklich schneidenden, oder von allen drei Kreisen im sphärischen (auch im wahren) Durchmesser geschnittenen Kreises.

---

6) Die zum Folgenden nöthigen Figuren lassen sich nach dem Früheren leicht denken, und sind desshalb nicht ausgeführt.

Da bei sich schneidenden Kreisen M_1, M_2, M_3 die gemeinschaftlichen Secanten die sphärischen Linien der gleichen Potenzen sind, so schneiden sich die gemeinschaftlichen sphärischen Sehnen dreier sich schneidenden Kreise in zwei Punkten.

Berühren sich die drei Kreise M_1, M_2, M_3 so schneiden sich die in den Berührungspunkten gezogenen sphärischen Tangenten in zwei Punkten.

Werden zwei feste Kreise von einem willkürlichen dritten geschnitten, so schneiden sich die gemeinschaftlichen Sehnen des dritten mit den beiden festen, auf der gemeinschaftlichen Sehne der beiden festen.

Hiernach lässt sich die sphärische Linie der gleichen Potenzen zweier sich nicht schneidenden Kreise construiren.

Als ein specieller Fall gilt:

Werden zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kreise M_1 und M_2 von einem willkührlichen Kreise M_3 berührt, so schneiden sich die sphärischen Tangenten zwischen diesem und jenen beidemal in der sphärischen Linie der gleichen Potenzen der ersten beiden Kreise. Umgekehrt:

Legt man aus einem Punkte der sphärischen Linie der gleichen Potenzen zweier Kreise M_1 und M_2 die vier sphärischen Tangenten an die beiden Kreise M_1 und M_2, so berühren diese sphärischen Tangenten jene Kreise in solchen Punkten, in denen sie zugleich von vier Kreisen berührt werden.

V. Denkt man sich alle Kreise P_1, P_2, u. s. w., welche die Kreise M_1 und M_2 rechtwinklich schneiden, so muss die unter diesen Kreisen enthaltene Centrale (III.) von je zweien dieser Kreise die sphärische Linie der gleichen Potenzen sein, denn M_1 und M_2 werden nicht nur von einem beliebigen Paar P-Kreise rechtwinklich geschnitten, sondern schneiden auch diese so, daher liegen ihre Mittelpunkte M_1 und M_2 auf der sphärischen Linie der gleichen Potenzen der P-Kreise d. h. die Centrale $M_1 M_2$ ist die sphärische Linie der gleichen Potenzen der P-Kreise.

Schneiden sich aber die beiden Kreise M_1 und M_2 und alle sonstigen M-Kreise, welche ein und dieselbe sphärische Linie der gleichen Potenzen haben, nicht, so müssen sich alle P-Kreise in zwei Punkten der Centralen $M_1 M_2$ schneiden, und umgekehrt schneiden sich die M-Kreise in zwei bestimmten Punkten der Centralen $P_1 P_2$, so werden sich alle P-Kreise nicht schneiden.

Ausserdem aber folgt:

Die gemeinschaftlichen sphärischen Sehnen e i n e s bestimmten Kreises M_1 mit allen P-Kreisen schneiden sich in zwei bestimmten Punkten der sphärischen Centrale $M_1 M_2$, weil diese Punkte die Punkte der gleichen Potenzen von irgend zwei P-Kreisen und dem Kreise M_1 sind.

Jene zwei Punkte sind Kugelpole von einander.

Dasselbe gilt von einem bestimmten Kreise P_1 in Bezug auf alle M-Kreise, und da die, nach den Durchschnittspunkten der P-Kreise mit dem Kreise M_1 aus ihren Mittelpunkten gezogenen sphärischen Radien zugleich sphärische Tangenten an M_1 sind, so folgt:

Zieht man aus beliebigen Punkten einer sphärisch Geraden, sphärische Tangenten an diesen Kreis, so schneiden sich alle zugehörigen sphärischen Berührungs-Chorden in zwei Punkten. Umgekehrt:

Zieht man auf der Kugel aus einem Punkte durch einen Kreis sphärische Geraden, und an den Durchschnittspunkten jeder mit dem Kreise sphärische Tangenten, so ist der geometrische Ort der Durchschnitte jedes Paares zusammengehöriger Tangenten eine sphärische Gerade, welche senkrecht steht auf demjenigen sphärischen Durchmesser des gegebenen Kreises, der durch den gegebenen Punkt geht.

VI. Zieht man aus einem Punkte A [Fig. 6.] zwei sphärische Gerade, und aus zwei Punkten der einen M und m dergestalt zwei andere sphärische Gerade MB und mb, dass sie die andern unter gleichem Winkel B und b schneiden, so ist:

$$\text{Sin. } MA : \text{Sin. } MB = \text{Sin. } B : \text{Sin. } A.$$
$$\text{Sin. } mA : \text{sin. } mb = \text{sin. } b : \text{sin. } A. \text{ daher}$$
$$\text{Sin. } MA : \text{Sin. } mA = \text{sin. } MB : \text{sin. } mb.$$

Zieht man von A aus eine andere sphärische Gerade Ab′B′, und beschreibt mit MB um M, und mit mb um m Kreise, so muss $B' = b'$ sein.

Und ferner:

Sind die Winkel, unter welchen eine sphärische Gerade zwei gegebene Kreise gleichartig schneidet, gleich, so muss diese sphärische Gerade durch den Punkt A gehn, welcher durch die Bedingung

$$\text{Sin. } MB : \text{sin. } mb = \text{Sin. } MA : \text{Sin. } mA.$$

ein ganz bestimmter ist; natürlich aber muss sein Kugelpol noch durch diese Bedingung bestimmt sein.

Aehnliches findet statt, wenn man für den Punkt A einen zwischen M und m liegenden Punkt J nimmt, nur liegen dann die Radien auf verschiedenen Seiten der sphärischen Centrale, und die sphärische Gerade durch J schneidet jene Kreise ungleichartig.

Man sieht dass A und J und ihre Kugelpole die äussern und innern sphärischen Aehnlichkeitspunkte der Kreise M und m genannt werden müssen, und alle durch sie gehenden sphärischen Geraden sind sphärische Aehnlichkeitslinien.

Die Punkte M, J, m, A liegen sphärisch harmonisch, da die vier nach ihnen gezogenen Kugelradien, ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

Aus dem Früheren folgt ferner:

Berühren sich die Kreise innerlich, so ist

$$MA = MB \text{ und } mA = mb; \text{ d. h.}$$

Der Berührungspunkt ist der äussere Aehnlichkeitspunkt, und der innere sphärische Aehnlichkeitspunkt, als vierter sphärisch-harmonischer Punkt, leicht zu construiren; da vom vollständigen sphärischen Vierseit Aehnliches gilt, als vom ebenen Vierseit.

Berühren sich die Kreise äusserlich, so ist

$$MJ = MB \text{ und } mJ = mb, \text{ d. h.}$$

Der Berührungspunkt ist hier der innere sphärische Aehnlichkeitspunkt.

Ausserdem folgt:

Jede sphärische Aehnlichkeitslinie, welche den einen Kreis schneidet, schneidet auch den andern, und wenn sie den einen berührt, berührt sie auch den andern, daher gehen umgekehrt, die gemeinschaftlichen sphärischen Tangenten zweier Kreise durch die Aehnlichkeitspunkte. Hiernach ist es leicht die gemeinschaftlichen sphärischen Tangenten zu ziehn, wenn die Punkte J und A bekannt sind.

Man sieht ferner eben so leicht als in der Ebene, dass die 6 Paar Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise M_1 M_2 M_3 zu je drei Paaren viermal in sphärischen Geraden liegen.

Diese vier sphärischen Geraden sind sphärische Aehnlichkeitslinien aller drei Kreise.

Ferner folgt:

Wenn der Kreis M_3 von den Kreisen M_2 und M_1 berührt wird, so liegen die Berührungspunkte, weil sie Aehnlichkeitspunkte sind, mit einem Aehnlichkeitspunkten-Paar von M_2 und M_1 in einer sphärischen Geraden, d. h. sie liegen in einer sphärischen Aehnlichkeitslinie, und umgekehrt: Die Punkte, in welchen eine sphärische Aehnlichkeitslinie M_1 und M_2 schneidet, sind für ein und denselben Kreis zugleich Berührungspunkte.

Da man vermittelst der sphärischen Linie der gleichen Potenzen leicht auf zwei gegebenen Kreisen M_1 und M_2 Punkte findet, in welchen sie zugleich von einem dritten Kreise berührt werden, so folgt aus dem Vorstehenden eine leichte Construction der sphärischen Aehnlichkeitspunkte.

Da die beiden Berührungspunkte eines Kreises M_3 mit zwei gegebenen M_1 und M_2 immer zwei von den Punkten sind, in welchen ein rechtwinklich schneidender Kreis P die beiden Kreise M_2 und M_1 trifft, und alle P-Kreise die sphärische Centrale M_1 M_2 zur sphärischen Linie der gleichen Potenzen haben, so hat A und J als Punkte in dieser Linie zu allen P-Kreisen gleiche Potenz.

Hieraus aber folgt wieder:

Jeder durch zwei Berührungspunkte gehende Kreis, auch wenn er kein P-Kreis ist, schneidet die Kreise M_1 und M_2 in noch zwei Punkten, die in einer und derselben sphärischen Aehnlichkeits-Linie liegen, und in denen sie desshalb von einem und demselben Kreise berührt werden.

B. Beweis der Steinerschen Construction der Aufgabe: Drei Kreise auf der Kugel zu construiren, von denen jeder die beiden andern und zwei Seiten eines gegebenen sphärischen Dreiecks berührt.

1) Es seien b und c zwei Kreise [7] [Fig. 7.] auf der Kugeloberfläche, welche sich im Punkte x äusserlich berühren. Man ziehe durch diesen, ihren innern

7) Es mögen hier, wie bei dem Beweise in der Ebene, a, b, c die Mittelpunkte, Radien, und Kreise selbst bezeichnen.

sphärischen Aehnlichkeitspunkt, ihre gemeinschaftliche sphärische Tangente xw. Es sei ferner uv eine äussere gemeinschaftliche sphärische Tangente, welche die erste im Punkte w begegnet, so ist:

$$\text{tg.bwx. tg.cwx} = \frac{\text{tg.b}}{\text{sin.wx}} \times \frac{\text{tg.c}}{\text{sin.wx}}$$

Da aber Winkel cwb gleich einem Rechten, so folgt:

$$\text{tg.bwx} \times \text{tg.cwx} = 1, \text{ daher}$$
$$\text{sin.}^2\,\text{wx} = \text{tg.b. tg.c.}$$

2) Man ziehe durch die Berührungspunkte u und v einen dritten beliebigen Kreis α [8]), welcher die Kreise c und b noch in den Punkten y und z schneidet, so wird die sphärische Grade αw senkrecht auf der sphärischen Graden uv stehn, und zugleich die sphärischen Graden uy und αc aufeinander senkrecht sein.

3) Nach (A. VI.) werden die Kreise b und c von ein und demselben Kreise a in den Punkten y und z berührt.

4) Schneiden sich die sphärischen Geraden cα und uv in A_1 so wird die sphärische Gerade A_1y den Kreis c im Punkte y berühren, weil uy senkrecht auf cα, und folglich auch den Kreis a in demselben Punkte.

5) Beschreibt man aus dem Punkte α einen zweiten Kreis, welcher uv im Punkte w berührt, so ist A_1 der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise c und α, daher wird A_1y auch den Kreis α berühren.

6) Umgekehrt: Die den Kreisen c und a gemeinschaftliche innere sphärische Tangente A_1y, welche durch ihren Berührungspunkt gezogen, berührt den Kreis α.

Was aber von A_1y in Beziehung auf die Kreise a und c galt, gilt ähnlicher Weise von der sphärischen Geraden zs in Beziehung auf die Kreise a und b, daher berührt auch diese gemeinschaftliche innere sphärische Tangente an a und b den Kreis α; d. h.

Die innere gemeinschaftliche sphärische Tangente von den Kreisen c und a ist äussere gemeinschaftliche sphärische Tangente von den Kreisen c und α, und die innere gemeinschaftliche sphärische Tangente von den Kreisen b und a ist zugleich äussere gemeinschaftliche sphärische Tangente von den Kreisen b und α.

7) Die sphärischen Graden xw, yA_1 und zs schneiden sich als sphärische Linien der gleichen Potenzen der Kreise a, b, c in einem Punkte P, welcher zugleich Mittelpunkt des in's sphärische Dreieck abc beschriebenen Kreises ist.

Hieraus folgt:

$$\text{sin.}^2\,\text{Px} = \frac{\text{tg.a. tg.b. tg.c.}}{\text{tg.a} + \text{tg.b} + \text{tg.c}} \quad {}^{9)}$$

---

8) Dieser Kreis ist in der Figur nicht gezeichnet.

9) Anmerkung. Der Radius des in ein sphärisches Dreieck beschriebenen Kreises findet sich auf elegante Weise, wie folgt:

8) Es ist ferner im Dreieck aPz

$$\text{tg.a} = \text{Sin.Pz. tg.aPz.}$$

Da aber der Punkt P einer von den beiden innern sphärischen Aehnlichkeitspunkten der Kreise α und a ist, so liegen die Punkte α, P, a in einer sphärischen Graden, daher ist:

$$\text{sP}\alpha = \text{aPz},$$

aber auch

$$\text{Pz} = \text{Px}$$

daher:

$$\text{tga} = \text{Sin.Px. tg.sP}\alpha.$$

9) Im sphärischen Dreieck sPα ist:

$$\text{tg.}\alpha = \text{sin.(sz—Px) tg.sP}\alpha = \text{sin.(wx—Px) tg.sP}\alpha$$

$$= \left(\frac{\text{sin.wx}}{\text{tg.Px.}} - \text{cos.wx}\right) \text{tg.a} \quad (8.)$$

Daher:

$$(\text{tg.}\alpha + \text{cos.wx tg.a})^2 + \text{tg.}^2\text{a sin.}^2\text{wx} = \text{tg.}^2\text{a} \frac{\text{sin.}^2\text{wx}}{\text{Sin.}^2\text{Px}}$$

$$= \text{tg.a (tg.a + tg.b + tg.c)} \quad (1 \text{ und } 7.)$$

Woraus man erhält:

$$\text{tg.}^2\alpha = \text{tg.a (tg.b + tg.c} - 2\text{tg.}\alpha \text{ cos.wx)}$$

10) Wenn man nun die sphärischen Geraden uc und wα bis zu ihrem Durchschnitt M verlängert, so ist im sphärischen Dreieck cMα:

$$\text{cos.c}\alpha = (\text{sin.c. tg.}\alpha + \text{cos.wx cos.c}) \text{ cos.}\alpha$$

Bezeichnet man wie gewöhnlich die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC durch a, b, c und a + b + c durch 2s, und die Winkel durch A, B, C, so ist, wenn der Radius des ins sphärische Dreieck beschriebenen Kreises durch ϱ bezeichnet wird, und man aus dem Mittelpunkte nach den Berührungspunkten und nach den Ecken sphärische Gerade zieht, und die hiedurch am Mittelpunkte entstehenden Winkel, welche Paarweise gleich sind, durch A′, B′, C′ bezeichnet; A′ + B′ + C′ = 2R

daher:

$$\frac{\text{tg.A}'.\ \text{tg.B}'.\ \text{tg C}'}{\text{tg.A}' + \text{tg.B}' + \text{C}'} = 1$$

ausserdem aber, da (s — a), (s — b), (s — c) die Segmente der Seiten sind:

$$\text{tg. A}' = \frac{\text{tg.(s} - \text{a)}}{\text{sin.}\varrho},\quad \text{tg.B}' = \frac{\text{tg.(s} - \text{b)}}{\text{sin.}\varrho},\quad \text{tg C}' = \frac{\text{tg.(s} - \text{c)}}{\text{sin.}\varrho},$$

welches verbunden unmittelbar giebt:

$$\text{Sin}^2\varrho = \frac{\text{tg.(s} - \text{a).}\ \text{tg.(s} - \text{b).}\ \text{tg.(s} - \text{c)}}{\text{tg.(s} - \text{a)} + \text{tg.(s} - \text{b)} + \text{tg.(s} - \text{c)}}$$

Malfatti hat auf eben solche Weise den entsprechenden Satz in der Ebene bewiesen. Siehe weiter unten das Ende seiner Abhandlung über das oben in Rede stehende Problem.

Zieht man ferner aus c eine sphärische Tangente cs_1 an den Kreis α, so ist, da das sphärische Dreieck $cs_1\alpha$ rechtwinklich:

$$\cos.cs_1 = \frac{\cos.c\alpha}{\cos.\alpha} = \sin.c\ .\ tg.\alpha + \cos.c.\ \cos.wx.$$

da nun:

$$1 - \cos.^2 c\ \cos.^2 wx = \sin.^2 c + \cos.^2 c\ \sin.^2 wx = \sin.c\ \cos.c.\ (tg.b + tg.c)$$

so ist:

$$\sin.^2 cs_1 = -\sin.^2 c\ tg.^2\alpha + \sin.c\ \cos.c\ [tg.b + tg.c - 2tg.\alpha\ \cos.wx]$$

$$= \sin.c\ tg.^2\alpha \left[\frac{\cos.c}{tg.a} - \sin.c\right] \quad (9.)$$

daher ist:

$$\sin.cs_1 = tg.\alpha \sqrt{\frac{\sin.c}{\sin.a}\ .\ \cos.(a+c)}$$

Da aber ferner im Dreieck αcs_1:

$$\sin.cs_1 = tg.\alpha\ .\ \cot g.\alpha cs_1$$

so ist:

$$\cot g.\alpha cs_1 = \sqrt{\frac{\sin.c}{\sin.a}.\ \cos.(a+c)}$$

11) Es sei nun die sphärische Gerade u'v' eine gemeinschaftliche sphärische Tangente an c und a, welche den Kreis b nicht trifft, sie treffe die sphärische Gerade Py in w', so hat man wie in 1):

$$\sin.^2 w'y = tg.a\ tg.c$$

daher:

$$tg.w'y = tg.w'u = \sqrt{\frac{\sin.a\ \sin.c}{\cos.(a+c)}}$$

woraus im sphärischen Dreieck u'cw'

$$\cot g.u'cw' = \sin.c \sqrt{\frac{\cos.(a+c)}{\sin.a\ \sin.c}} = \sqrt{\frac{\sin.c}{\sin.a}\cos.(a+c)}$$

folgt, daher ist:

$$\angle\ \alpha cs_1 = \angle\ w'cu'.$$

12) Schneiden sich nun uv und u'v' in C, so hat man um den Kreis c das sphärische Dreieck CA_1w' und die Flächen der Dreiecke Ccu, ucA_1 und w'cu' sind das halbe Dreieck CA_1w',

daher ist, wenn K die Kugeloberfläche:

$$\left[\left(\frac{C}{2} + Ccu - R\right) + \left(\frac{A_1}{2} + A_1cu - R\right) + \left(\frac{w'}{2} + w'cu - R\right)\right] \frac{K}{4R}$$

$$= \left(\frac{A_1}{2} + \frac{C}{2} + \frac{w'}{2} - 2R\right) \frac{K}{4R}; \text{ d. h.}$$

$$w'cu' + CcA_1 = 2R$$

also auch

$$\alpha cs_1 + CcA_1 = 2R.$$

Hieraus folgt, dass die sphärischen Geraden Cc und cs_1 zusammen fallen, oder: die sphärische Gerade welche den Winkel C halbirt, der von den sphärischen Tangenten uv und u'v' gebildet wird, tangirt den Kreis α.

13) Es sei nun u''v'' diejenige gemeinschaftliche äussere sphärische Tangente für b und a, welche den Kreis c nicht trifft. Ihre Durchschnittspunkte mit den sphärischen Graden uv und u'v' seien B und A, so erkennt man ähnlicherweise wie früher, dass die sphärische Gerade Bb den Kreis α berührt.

Ist daher ABC ein den Kreisen a, b, c umschriebenes sphärisches Dreieck, so dass jede Seite zwei Kreise berührt, und sind AO, BO, CO die sphärischen Halbirungslinien der Winkel A, B, C, so wird der Kreis α ins sphärische Dreieck CBO beschrieben sein.

14) Umgekehrt: Der im sphärischen Dreieck CBO beschriebene Kreis α wird von zwei der drei sphärischen Tangenten Px, Py, Pz, welche die innern gemeinschaftlichen sphärischen Tangenten an die Kreise a, b, c sind, nehmlich von Py und Pz berührt, und berührt zugleich die Seite CB in demselben Punkte w, in welchem die dritte jener sphärischen Tangenten sie trifft.

15) Sind nun β und γ die in die sphärischen Dreiecke CAO und ABO beschriebenen Kreise, so beweist man auf gleiche Weise, dass sie respective von zP, xP und von xP, yP berührt werden. Man kann daher von w, wo der Kreis α die Seite BC berührt, an die vier Kreise b, c, β, und γ eine gemeinschaftliche sphärische Tangente ziehn, welche die beiden erstern in ihrem Berührungspunkte berührt.

16) Ist daher endlich ein sphärisches Dreieck ABC gegeben, und man sucht drei Kreise a, b, c, von denen jeder die beiden andern, und zugleich zwei Seiten des Dreiecks berührt, so halbirt man zuerst die Winkel A, B, C durch AO, BO, CO, dann beschreibt man in die sphärischen Dreiecke BCO, CAO, ABO die Kreise α, β, γ welche die Seiten BC, CA, AB in den Punkten w, w', w'' berühren, zieht von w eine gemeinschaftliche sphärische Tangente an die Kreise β und γ, so wird diese auch die beiden gesuchten Kreise b und c berühren, welche dadurch völlig bestimmt sind, indem sie in bestimmte sphärische Dreiecke beschrieben werden.

Eine ähnliche Construction giebt den Kreis a.

Hiedurch ist die Richtigkeit der Steinerschen Construction auf der Kugel für sphärische Gerade bewiesen.

Es ist nun leicht vermöge bekannter stereographischer Sätze die Steinersche Construction für drei sphärische Gerade auf die Ebene für den Fall zu übertragen, wo statt der Geraden Kreise gegeben sind, und eben so leicht von dieser auf die Construction der allgemeineren Kugelaufgabe zu kommen.

C. Beweis der Steinerschen Construction der Aufgabe: Es sind drei Kreise in der Ebene gegeben, man soll drei andere construiren, von denen jeder die beiden andern, und zwei der gegebenen berührt.

1) Nach den bekannten Eigenschaften der stereographischen Projection, sind die stereographischen Projectionen von Kreisen wieder Kreise, und die Winkel unter denen sich Kreise auf der Kugel schneiden, den Winkeln gleich, unter denen sich ihre stereographischen Projectionen schneiden, und sich berührende Kreise geben natürlich auch sich berührende Kreise in der stereographischen Projection.

2) Bekanntlich liegen die Mittelpunkte zweier Kreise [Fig. 8.] M und m und ihre Aehnlichkeitspunkte A und J harmonisch, und wenn sich die Kreise in C und B schneiden, und man zieht CM, CJ, Cm, CA, so wird, weil jeder Aehnlichkeitsstrahl parallele Radien bedingt, der Radius

MD || dem Radius Cm sein, also:

$$D = q$$

da nun auch: $p = D$

so folgt: $p = q$

Aus diesem Grunde muss, weil CM, CJ, Cm, CA ein harmonisches Bündel ist

$$JCA = 1\ R$$

sein. Hieraus folgt der bekannte Satz:

Der Kreis, welcher über den Abstand der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise als Durchmesser beschrieben wird, geht durch die Durchschnittspunkte der beiden Kreise, wenn sie sich schneiden, oder gehört auch der Schaar von M-Kreisen an.

Aber aus der Gleichheit der Winkel folgt ferner:

Die mit dem Radius JC aus J und mit dem Radius AC aus A beschriebenen Kreise schneiden die gegebenen Kreise unter gleichem Winkel, weil die Radien gleiche Winkel mit einander bilden, oder mit andern Worten:

Der Kreis A und der Kreis J halbiren die Winkel unter denen sich die Kreise M und m schneiden, und da die Kreise A und J der äussere und innere Potenzkreis von M und m sind, so haben wir den Satz:

Die Potenzkreise zweier sich schneidenden Kreise halbiren die Winkel, welche diese mit einander machen; und umgekehrt:

Die beiden Kreise, welche die Winkel zweier gegebenen Kreise halbiren, sind ihre Potenzkreise.

3) Hiernach ist es klar, dass das stereographische Bild des Kugelkreises, welcher den Winkel zweier sich schneidenden Kugelkreise halbirt, der Potenzkreis von den stereographischen Bildern jener beiden Kreise ist.

4) Es lässt sich nun Schritt vor Schritt die Bedeutung des stereographischen Bildes von der bereits bewiesenen Construction auf der Kugel nachweisen:

a) Die drei auf der Kugel gegebenen sphärischen Geraden AB, BC, CA. werden im Bilde drei Kreise M_1, M_2, M_3, (1).

b) Die drei sphärischen Graden OA, OB, OC, welche die Winkel jener halbiren, werden im Bilde die 3 Potenzkreise A_1, A_2, A_3 der gegebenen (3).

c) Die drei Kreise α, β, γ auf der Sphäre, welche von je zwei sphärischen Halbirungslinien und einer Seite des sphärischen Dreiecks berührt werden, sind im Bilde die Kreise μ_1, μ_2, μ_3, welche von je zwei Potenzkreisen und von einem der drei gegebenen Kreise berührt werden.

d) Die gemeinschaftlichen sphärischen Tangenten aus den respectiven Berührungspunkten dieser Kreise α, β, γ mit den Seiten BC, CA, AB an die respectiven Kreise β,γ; γ,β; α,β geben im Bilde Kreise, die durch die entsprechenden Punkte gehn, und die entsprechenden Kreise berühren; so entspricht zum Beispiel der sphärischen Tangente wx auf der Kugel, im Bilde der Kreis, welcher durch den Berührungspunkt der Kreise M, und μ, geht, und die Kreise μ_2 und μ_3 berührt.

e) Die gesuchten Kreise auf der Kugel a, b, c geben im Bilde die drei gesuchten Kreise m_1, m_2, m_3, von denen jeder einen der gegebenen und die beiden andern der gesuchten berührt.

So ist das Bild also eine Configuration von 5mal 3 Kreisen.

5) Nach dieser Vergleichung der Kugelfigur mit ihrem stereographischen Bilde müssen wir sehn, wie drei gegebene Kreise jederzeit als stereographisches Bild dreier sphärischen Geraden betrachtet werden können, und wie die ausserdem vorkommenden Bilder sphärischer Geraden, als solche construirt werden.

Nennen wir den Durchschnitt der Kugel mit der Ebene der 3 gegebenen Kreise M_1 M_2 M_3 den Äquator der stereographischen Projection, so ist zunächst klar, dass jeder der gegebenen Kreise diesen Äquator C im Durchmesser schneiden muss, denn der Äquator ist grösster Kugelkreis und seine eigene Projection, da nun alle grössten Kreise sich untereinander im Durchmesser schneiden, so schneiden auch alle grössten Kreise, oder sphärische Geraden den Äquator im Durchmesser, und daher müssen auch ihre stereographischen Bilder den Äquator im Durchmesser schneiden, denn jedes Kugelgebilde hat mit seinem stereographischen Bilde das gemeinschaftlich, was im Äquator liegt.

Hieraus folgt umgekehrt:

Jeder Kreis in der Ebene des Äquators oder in der Tafel, welcher den Äquator im Durchmesser schneidet, ist das stereographische Bild von einer sphärischen Geraden.

6) Der Äquator ist derjenige Kreis C, welcher von allen drei gegebenen Kreisen im Durchmesser geschnitten wird. Nun giebt es aber bei drei sich

schneidenden Kreisen jederzeit einen, und nur einen Kreis, welcher von allen dreien im Durchmesser geschnitten wird, also giebt es zu drei gegebenen sich schneidenden Kreisen jedesmal eine Kugel, zu der sie als Bilder sphärischer Geraden gehören.

Der Mittelpunkt des Äquators und der Kugel, C ist der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise M_1, M_2, M_3, und das Quadrat seines Radius ist die Potenz dieses Punktes, in Bezug auf einen der drei gegebenen Kreise. Hiernach ist der Äquator leicht zu construiren.

7) Die drei Potenzkreise A_1, A_2, A_3, müssen, da sie durch die Durchschnitte ihrer Kreise gehen, zum Punkt C dieselbe Potenz haben, also müssen sie gleichfalls den Äquator im Durchmesser schneiden, also sind sie gleichfalls Bilder sphärischer Geraden. (5)

8) Denkt man sich ferner aus dem Berührungspunkte der Kreise M_1 und μ_1 einen Kreis beschrieben, welcher μ_2 berührt und den Äquator im Durchmesser schneidet, so entspricht ihm auf der Kugel die sphärische Gerade, von welcher (B 14 und 15) nachgewiesen ist, dass sie auch den Kreis berührt, welchem μ_3 entspricht, daher berührt auch im Bilde dieser Kreis den Kreis μ_3 und umgekehrt:

Construirt man den Kreis, welcher durch den Berührungspunkt der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher μ_2 und μ_3 berührt, so muss dieser das Bild einer sphärischen Geraden sein. Ähnliches gilt von den beiden andern Kreisen, welches die Bilder von w′y und w″z sind.

9) Die aus diesen Gründen hervorgehende Construction ist also bei drei gegebenen sich schneidenden Kreisen M_1, M_2, M_3 folgende:

Man zieht die drei äussern Ähnlichkeitskreise A_1, A_2, A_3, beschreibt dann die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3 von denen

μ_1 die Kreise M_1, A_2 und A_3
μ_2 „ „ M_2, A_3 „ A_1
μ_3 „ „ M_3, A_1 „ A_2

berührt, zieht dann aus dem Berührungspunkte von M_1 und μ_1 einen Kreis, welcher die Kreise μ_2 und μ_3 berührt, und beschreibt endlich Kreise m_2 und m_3, welche von dem zuletzt gezogenen und respektive von M_1 und M_3 berührt werden. Ähnlicher Weise construirt man den Kreis m_1.

Es sind bei dieser Beweisführung die drei gegebenen Kreise sich schneidend angenommen worden, weil nur in diesem Falle ihre Configuration als stereographisches Bild einer reellen Kugelfigur betrachtet werden kann. Schneiden sich die Kreise nicht, so existirt keine Kugel, welche der Figur zugehört, aber die von der Kugel selbst unabhängige Construction ist, vermöge des Princips der Continuität mit demselben Rechte allgemein wahr, wie die Sätze über die gemeinschaftliche Secante zweier sich nicht schneidender Kreise, und wir können, nach dem Beispiele Poncelet's, den obigen Beweis vermöge jenes Princips als allgemeinen Beweis ansehn.

D. Zusätze.

1) Die Construction der Aufgabe:

„Drei Kreise auf der Kugel zu beschreiben, von denen jeder die beiden andern, und zwei von drei gegebenen Kugelkreisen berührt",

ist aus der (in C) eben bewiesenen Construction wiederum vermittelst der stereographischen Projection, leicht zu beweisen; indem man diese Construction von neuem als stereographisches Bild eines Kugelbildes ansieht. Nur tritt hier der wesentliche Unterschied ein, dass man jetzt nicht den von den gegebenen Kreisen im Durchmesser geschnittenen als den Äquator betrachtet, sondern irgend einen andern Kreis in der Ebene der drei gegebenen Kreise. Hiedurch werden diese nicht mehr die Bilder von sphärischen Geraden, sondern von drei Kreisen auf der Kugeloberfläche, die Potenzkreise bleiben Potenzkreise, und überhaupt alle in der Ebene vorkommenden Kreise, werden durch Kreise ersetzt.

2) Von den Oberflächen der zweiten Ordnung gelten unter gewissen Bedingungen theilweise die Sätze der stereographischen Projection, da es immer möglich ist, den Augenpunkt und die Tafel so anzunehmen, dass sich sämmtliche ebene Schnitte der Oberfläche als Kreise projiciren, daher ersieht man, wie es möglich wird, jene Construction auf solche Oberflächen zu übertragen, und sie zu beweisen.

3) Die Methode der stereographischen Projection ins Besondere hat den Vorzug vor andern Projectionsmethoden, dass sie sehr geschmeidig ist, Aufgaben in der Ebene, welche sich auf Gerade Linien beziehn, in solche Aufgaben zu verallgemeinern, wo statt der Geraden Kreise vorkommen; wenn jene Aufgaben ihre Analogien für sphärische Gerade auf der Kugel haben. So lässt sich, um nur ein interessantes Beispiel anzuführen, die Apollonische Tactionenaufgabe: „Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt", vermittelst der stereographischen Projection auf die Aufgabe zurückführen, oder besser gesagt, als die Aufgabe ansehn: Einen Kreis zu beschreiben, der drei Gerade berührt. Nehmlich:

Der Aufgabe: „Die Kreise zu beschreiben, die drei Gerade berühren", oder um kürzer zu reden, der Aufgabe: „Einen Kreis in ein gegebenes Dreieck zu beschreiben, in der Ebene", ist die auf der Kugel: „Einen Kreis ins sphärische Dreieck zu beschreiben" ganz analog; und das stereographische Bild dieser letztern ist offenbar das angeführte Apollonische Problem. Die aus diesen Betrachtungen hervorgehende Construction stimmt im Wesentlichen mit der von Gaultier[10]) und der von Poncelet[11]) gegebenen überein, wobei sie jedoch die besondere Eigenthümlichkeit besitzt, bloss durch Bilder von sphärischen Geraden ausgeführt zu werden.

---

10) Journal de l'école polytechnique. Cah. XVI. Tom. IX. pag. 203, 1813

11) Traité des propriétés projectives des figures p. Poncelet pag. 144, 1822.

4) Man sieht ausserdem, dass man vermittelst der stereographischen Projection auch leicht zu allgemeineren Kugelaufgaben gelangt: so ist es nach dem Vorigen leicht; auf der Kugeloberfläche den Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Da die Memoiren der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften ein in Deutschland seltenes Werk sind, so möge es mir erlaubt sein, bei dieser Gelegenheit eine Uebertragung der schon oben citirten Original-Abhandlung von Malfatti über das in Rede stehende Problem aus dem Italienischen bekannt zu machen, welche ich der zuvorkommenden Güte eines als Schulmann wie als Gelehrten hochverdienten Mannes verdanke.

Denkschrift
über eine Aufgabe aus der Stereotomie.

Von Gianfrancesko Malfatti.

(Der Gesellschaft am 4ten October 1802 überreicht.)

Es ist ein senkrechtes dreiseitiges Prisma von irgend einem Material, etwa von Marmor gegeben, aus diesem sind drei Cylinder von der Höhe des Prisma und von einem verhältnissmässigen möglichst grossen Inhalt zu formen, so dass also nach Massgabe der gewünschten Grösse von dem Material möglichst wenig übrig bleibt.

Es giebt in der Geometrie einige Aufgaben, deren analytische Auflösung, wegen der Länge und Unsicherheit der Rechnungen, denen sich der Geometer dabei unterziehen musste, nothwendig dem Leser missfallen muss, während man bisweilen nach Auffindung des richtigen Resultates, durch Verwandlung der analytischen in eine synthetische Rechnung und der Aufgabe in einen Lehrsatz auf einem leichteren und ebneren Wege die Sache in einer bequemeren Form darlegen kann. Von dieser Art ist die obige Aufgabe, die mir unlängst vorgelegt wurde, und deren Lösung mir anfangs leicht erschien, da die sich, wie ich bemerkte, darauf zurükführen liess, drei Kreise in die beiden Dreiecke der parallelen Grundflächen des Prisma einzuschreiben, von denen jeder die beiden andern und zugleich zwei Seiten des Dreiecks berührt. Als ich nun aber zur Lösung dieser zweiten Aufgabe schritt, fand ich mich, ganz gegen meine Erwartung, in weitläuftige und unbequeme Formeln verwickelt, die wohl die Geduld eines minder beharrlichen Menschen hätten erschöpfen können. Als ich jedoch die Schwierigkeiten überwunden, und ganz einfache Resultate erlangt hatte, machte ich den Versuch mir durch Umwandlung der Aufgabe in einen Lehrsatz einen bequemeren Weg zur Beweisführung zu bahnen: ich gelangte auf folgende Weise zum Ziel.

Das gegebene Dreieck [Figur 9.] sei ABV; ich halbire seine Winkel durch die Geraden AC, BC, VC.

Bekanntlich ist C der Mittelpunkt eines in das Dreieck eingeschriebenen Kreises, dessen Berührungspunkte ich in J, L, M annehme, so dass die Radien CJ, CL, CM auf den Seiten senkrecht stehn. Da nun die Winkel um den Punkt C gleich 4 Rechten sind, so wird auch

$$ACJ + BCJ + VCL = 2\ R$$

sein. Ferner wird:

$$AJ = tg.\ ACJ,\ BJ = tg.\ BCJ,\ \text{und endlich}\ VL = tg.\ VCL,$$

und da:

$$LCV = 2\ R - (ACJ + BCJ)$$

so liefert uns, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises r, die Tangente AJ = s die zweite Tangente BJ = t, und die dritte Tangente VL = u gesetzt wird, die Trigonometrie den Ausdruck:

$$(1.)\ u = \frac{r^2 (s + t)}{st - r^2}$$

Aus diesem Satze ergiebt sich:

$$r^2 (s + t) = stu - r^2u$$

d. h. $r^2 (s + t + u) = stu$,

und also, wobei $s + t + u$ dem halben Umfang des Dreieck's gleich ist,

$$(2.)\ s + t + u = \frac{s.\ t.\ u}{r^2}$$

Aus dem angeführten trigonometrischen Lehrsatze ergeben sich mehrere Folgesätze.

Aus der obigen Nummer (1.) entsteht, durch Erhebung auf's Quadrat:

$$\frac{r^4 s^2 + 2 r^4 st + r^4 t^2}{s^2 t^2 - 2 r^2 st + r^4} = u^2$$

und hieraus:

$$r^2 + \frac{r^4 s^2 + 2 r^4 st + r^4 t^2}{s^2 t^2 - 2 r^2 st + r^4} = u^2 + r^2$$

oder:

$$\frac{r^2 s^2 t^2 - 2 r^4 st + r^6 + r^4 s^2 + 2 r^4 st + r^4 t^2}{(st - r^2)^2} = \frac{r^2 (s^2 t^2 + r^2 s^2 + r^2 t^2 + r^4)}{(st - r^2)^2}$$

$$= r^2 + u^2 = \frac{r^2 (r^2 + s^2) (r^2 + t^2)}{(st - r^2)^2},$$

und hieraus:

$$\sqrt{r^2 + u^2} = r \frac{\sqrt{r^2 + s^2}\ \sqrt{r^2 + t^2}}{st - r^2}$$

oder:

$$(3.)\ \sqrt{r^2 + s^2}\ .\ \sqrt{r^2 + t^2} = \frac{(st - r^2)\sqrt{r^2 + u^2}}{r.}$$

Da nun:

$$(s + t)^2 = \frac{(st - r^2)^2\ u^2}{r^4}$$

oder:

$$s^2 + t^2 = \frac{(st - r^2)^2\ u^2}{r^4} - 2st$$

so hebt sich auf beiden Seiten u^2, und es entsteht:

$$s^2 + t^2 - u^2 = \frac{(st - r^2)^2\ u^2}{r^4} - 2st - u^2$$

$$= \frac{s^2\ t^2\ u^2}{r^4} - \frac{2stu^2}{r^2} + u^2 - 2st - u^2;$$

endlich nach der Reduction

$$(4.)\ s^2 + t^2 - u^2 = \frac{s^2\ t^2\ u^2}{r^4} - \frac{2stu^2}{r^2} - 2st.$$

Nimmt man die Tangenten s, u als gegeben, und sucht den Ausdruck von t durch s und u, so wird es genügen in der Formel (1.) u in t, und t in u zu verwandeln. Ebenso wird man, wenn die Tangente t und u als gegeben angenommen werden, und der Ausdruck von s durch t und u gesucht wird, in der obigen Formel (1.) s und u miteinander vertauschen müssen; dann erhalten wir:

$$t = \frac{r^2\ (s + u)}{su - r^2};\quad s = \frac{r^2\ (t + u)}{tu - r^2};$$

nimmt man dieselbe Vertauschung der Bezeichnung in den Formeln von Nummer (3.) und (4.) vor, so entsteht:

$$(5.)\ .\sqrt{r^2 + s^2}\ .\ \sqrt{r^2 + u^2} = \frac{(su - r^2)\ \sqrt{r^2 + t^2}}{r}$$

$$(6.)\ \sqrt{r^2 + s^2}\ \ \sqrt{r^2 + t^2} = \frac{(tu - r^2)\ \sqrt{r^2 + s^2}}{r}$$

und wir erhalten, wenn wir dieselbe Umwechselung in der Formel (4.) vornehmen:

$$(7.)\ s^2 + u^2 - t^2 = \frac{s^2\ t^2\ u^2}{r^4} - \frac{2st^2\ u}{r^2} - 2su$$

$$(8.)\ t^2 + u^2 - s^2 = \frac{s^2\ t^2\ u^2}{r^4} - \frac{2s^2\ tu}{r^2} - 2tu$$

Nachdem diese trigonometrischen Resultate vorausgeschickt sind, nehme ich an, dass AP $= m$ BQ $= n$, VR $= p$ die Abschnitte der beiden Seiten AB, AV sind, aus deren Endpunkten P, Q, R die Perpendikel PK, QO, RS errichtet werden, welche den Linien AC, BC, VC in den Punkten K, O, S begegnen, so sind PK $= x$, QO $= y$ RS $= z$ als Radien der Kreise bestimmt, welche sich, den vorausgesetzten Bedingungen der Aufgabe gemäss, berühren.

Man verbinde nun die Punkte K, O durch die Gerade KO und ziehe vom Punkte O die Linie ON parallel mit der Seite AB bis zum Radius KP. Es ist klar, dass KO der Summe der Radien KP, OQ gleich sein muss, oder KO $= x + y$. Ferner wird KN gleich der Differenz derselben Radien KP, OQ d. h. KN $= x - y$. Nun aber ist nothwendigerweise ON $= 2\sqrt{xy}$, weil die Summe der Quadrate KN, ON gleich dem Quadrat von $x + y$ ist, d. h. gleich dem Quadrate von KO. Weil aber ON $=$ PQ, und PQ $=$ AB $-$ AP $-$ BQ oder $=$ AJ $+$ BJ $-$ AP $-$ BQ $= s + t - m - n$, so ergiebt sich die Richtigkeit folgender ersten Gleichung

$$\text{(a.)}\ 2\sqrt{xy} = s + t - m - n.$$

Indem man durch ähnliche Construction die Kreise der Radien KP, RS, und ebenso die Kreise der Radien OQ, RS verbindet, werden sich folgende beiden Gleichungen als richtig ergeben.

$$\text{(b.)}\ 2\sqrt{xz} = s + u - m - p$$
$$\text{(c.)}\ 2\sqrt{yz} = t + u - n - p$$

Nun aber behaupte ich, dass, wenn wir setzen:

$$\text{(d.)}\ 2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$$
$$\text{(e.)}\ 2n = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$$
$$\text{(f.)}\ 2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2}$$

den drei obengenannten Gleichungen vollständig genügt wird.

Beginnen wir mit unsern Werthen die Richtigkeit der ersten Gleichung (a) zu erweisen; werden die beiden Werthe von m und n verbunden, so ergiebt sich:

$$2m + 2n = 2s + 2t + 2u - 2r - 2\sqrt{r^2 + u^2} \text{ oder}$$
$$m + n = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + u^2}, \text{ und daraus:}$$
$$s + t - m - n = r - u + \sqrt{r^2 + u^2}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren wird sich erweisen lassen, dass aus unsern Werthen folgt:

$$s + u - m - p = r - t + \sqrt{r^2 + t^2}$$
$$t + u - n - p = r - s + \sqrt{r^2 + s^2}$$

In den Werthen von m und n wollen wir statt $s + t + u$ den gleichbedeutenden Ausdruck

$\frac{stu}{r^2}$ (2) setzen, und der Bequemlichkeit wegen

$$\frac{stu}{r^2} - r = A, \sqrt{r^2 + s^2} = S, \sqrt{r^2 + t^2} = T, \sqrt{r^2 + u^2} = V,$$

so entsteht:

$$2m = A - V + S - T$$
$$2n = A - V - (S - T).$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$4mn = (A - V)^2 - (S - T)^2 = A^2 + V^2 - S^2 - T^2 - 2AV - 2ST$$

die vier ersten Ausdrücke bilden den rationalen, die beiden andern den irrationalen Theil der Gleichung.

Werden in die erstern die Werthe von A, V, S, T wieder eingesetzt, so ergiebt sich:

$$A^2 + V^2 - S^2 - T^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + r^2 + r^2 + u^2 - r^2 - s^2 - r^2 - t^2$$
$$= \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + u^2 - s^2 - t^2$$
$$= \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} - \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} + \frac{2stu^2}{r^2} + 2st \ (4)$$
$$= \frac{-2rstu + 2stu^2 + 2r^2 st}{r^2} = \frac{st}{r^2}\left(-2ru + 2u^2 + 2r^2\right)$$

Der irrationale Theil ergiebt durch Einführung der Werthe von A, S, T, V:

$$-2\left(\frac{stu - r^3}{r^2}\right)\sqrt{r^2 + u^2} + 2\sqrt{r^2 + s^2}\sqrt{r^2 + t^2}$$
$$= -\frac{2(stu - r^3)\sqrt{r^2 + u^2}}{r^2} + \frac{2(st - r^2)\sqrt{r^2 + u^2}}{r} \ (3)$$
$$= \frac{-2stu + 2str}{r^2}\sqrt{r^2 + u^2}$$

Hieraus entsteht, wenn die Gleichung mit $\frac{r^2}{st}$ multiplizirt wird:

$$\frac{4r^2 mn}{st} = -2ru + 2u^2 + 2r^2 + (-2u + 2r)\sqrt{r^2 + u^2}$$
$$= [(r - u) + \sqrt{r^2 + u^2}]^2$$

Es verhält sich aber $AI : IC = AP : PK$;
$BI : IC = BQ : QO$

oder analytisch ausgedrückt:

$$s : r = m : x \left(= \frac{rm}{s}\right)$$

$$t : r = n : y \left(= \frac{rn}{t}\right)$$

$$\text{was } xy = \frac{r^2mn}{st}, \text{ und } 4xy = \frac{4r^2mn}{st} \text{ ergiebt.}$$

Daraus folgt: $4xy = [(r - u) + \sqrt{r^2 + u^2}]^2$,
und endlich:

$$2\sqrt{xy} = r - u + \sqrt{r^2 + u^2} = s + t - m - n$$

das, was zu beweisen war.

Wir gehen nun zum Beweise über, dass mit den angenommenen Werthen sich die Gleichung

$$2\sqrt{xz} = s + u - m - p$$

ergiebt. Wenn:

$$2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2};$$

$$2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2}$$

ist, so muss:

$$2m + 2p = 2s + 2t + 2u - 2r - 2\sqrt{r^2 + t^2} \text{ d. h.}$$

$$m + p = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + t^2}$$

sein, und daher:

$$s + u - m - p = r - t + \sqrt{r^2 + t^2} = 2\sqrt{xz}.$$

Um auch die Richtigkeit dieser Gleichung zu erweisen, wird, wenn wir uns der obigen grossen Buchstaben bedienen

$$2m = A + S - T - V$$

$$2p = A + V - S - T$$

sein, d. h.

$$2m = A - T + S - V$$

$$2p = A - T - (S - V)$$

durch Multiplication erhalten wir:

$$4mp = A^2 + T^2 - S^2 - V^2 - 2AT + 2SV$$

$$= \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + r^2 + r^2 + t^2 - r^2 - s^2 - r^2 - u^2$$

$$- \left(\frac{2stu}{r^2} - 2r\right) \cdot \sqrt{r^2 + t^2} + 2\sqrt{r^2 + s^2} \sqrt{r^2 + u^2}$$

$$= \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} - \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} + \frac{2st^2u}{r^2} + 2su \quad (7.)$$

$$- \left(\frac{2stu}{r^2} - 2r\right) \sqrt{r^2 + t^2} + \frac{2us - 2r^2}{r} \sqrt{r^2 + t^2}$$

$$= \frac{su}{r^2}\left(-\ 2rt + 2t^2 + 2r^2 + (-\ 2t + 2r)\sqrt{r^2 + t^2}\right)$$

$$= \frac{su}{r^2}(r - t + \sqrt{r^2 + t^2})^2 \quad \text{d. h.}$$

$$2\sqrt{xz} = r - t + \sqrt{r^2 + t^2}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren, werden wir bei dem Gebrauch der Werthe von n und p die dritte Gleichung:

$$2\sqrt{yz} = r - s + \sqrt{r^2 + s^2}$$

begründet finden.

Das Verfahren aber, um die Grösse der Werthe AP, BQ, VR, durch welche die Radien der für die Aufgabe gesuchten Kreise sich ergeben zu finden, ist sehr leicht. Denn da:

$$2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$

wo $s + t + u$ den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet, so muss, wenn man den Punkt, wo der dem Dreieck eingeschriebene Kreis die Secante AC schneidet durch X bezeichnet, und also

$$AX = \sqrt{r^2 + s^2} - r$$

wird, wenn ferner zu der Gerade AB, die über B hinaus verlängert ist, zur Ergänzung des halben Umfangs $Ba = u$, und auch noch $ab = AX$ hinzukommt, nothwendig die ganze Linie

$$Ab = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} \text{ sein.}$$

Wird von Ab die Summe der beiden Secanten BC, VC, = bE abgezogen, so ist offenbar $AE = 2m$, so dass, wenn sie in P halbirt, und in P nach der Secante AC die Senkrechte PK errichtet wird, dies der Radius des ersten Kreises ist, der nach der Forderung der Aufgabe, die beiden Seiten des Dreiecks berührt.

Mit derselben Leichtigkeit lässt sich der Radius QO und die Senkrechte BQ bestimmen. Denn da $2n = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$, so wird sich, wenn wir zu der über A hinaus verlängerten BA noch $Ac = u$, und ausserdem $cd = By = \sqrt{r^2 + t^2} - r$ hinzufügen, und von der ganzen Linie dB die Summe der beiden Secanten AC, VC abziehn, ergeben müssen, dass $BF = 2n$, und wird diese in Q halbirt, und aus Q bis zur Secante BC die Senkrechte QO errichtet, so ist diese der Radius des Kreises, der die beiden Seiten des Dreiecks AB, BV, so wie den ersten Kreis berührt, der um den Punkt K beschrieben ist.

Da $2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2}$, so ergiebt sich, wenn VA über A hinaus verlängert wird, $Ac = t$, und wir erhalten, wenn $ef = VZ$ hinzugefügt wird, $Vf = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2}$. Hiervon ziehen wir fG gleich den beiden Secanten AC und BC ab. Wird nun VG

in R halbirt, und nach VC die Senkrechte RS errichtet, so muss der Kreis, welcher um S mit dem Radius SR beschrieben wird, die beiden Seiten AV, VB und die beiden andern Kreise mit den Mittelpunkten K, O berühren.

Die Leichtigkeit dieses Verfahrens entschädigt hinreichend für die Mühe, einer ziemlich weitläuftigen Darlegung unserer drei Lehrsätze gefolgt zu sein, die übrigens durch Anwendung der Trigonometrie gleich im Anfange der Auflösung unserer Aufgabe auf analytischem Wege die Erreichung des Ziels sehr erleichtert hat.

Wenn das Dreieck AVB [Figur 10.] gleichschenklich ist, so werden offenbar die Kreise an der Grundlinie, die ihre Mittelpunkte in K und O haben, gleich sein, und die Gerade KO mit AB parallel werden, da sie sich in L berühren, wo die Linie OK die Linie VJ schneidet, welche letztere aus dem Scheitel V senkrecht auf die Grundlinie fällt.

Um die Grösse dieser gleichen Radien zu bestimmen, ziehe man die Secante AC nach dem Mittelpunkt des in's Dreieck beschriebenen Kreises, und halbire den rechten Winkel AJC, wodurch die Linie AC in K getroffen wird. Von diesem Punkte wird die Senkrechte KP auf die Grundlinie AB gefällt, diese ist der Radius des einen von den beiden gleichen Kreisen. Werden nun die andern Senkrechten KT, KL auf die Geraden AV, VJ, gezogen, so sind bei der Gleichheit der Winkel KJP, KJL, auch die Geraden KP, KL gleich, und weil der Winkel A durch die Gerade AC halbirt ist, so müssen die Geraden KP und KT gleich sein. Hiernach muss der Kreis, der um K mit dem Radius KP beschrieben ist, die Seiten AV, AB in den Punkten T, und P berühren und die Gerade JV in L. Wird diese nun nach O verlängert, so dass LO = LK ist, so wird O der Mittelpunkt des andern gleichen Kreises, der den ersten in L und zugleich die Seiten AB, BV berührt.

Wir wollen nun noch den dritten Kreis nach der allgemeinen Regel bestimmen. Es werde von A aus die Linie AV verlängert, und AF = AJ gemacht, und daran FG = VZ die Strecke zwischen dem Scheitelpunkt V und dem in dem Dreieck beschriebenen Kreise. Zieht man nun von der ganzen Linie GV, GH = der doppelten Secante AC ab, halbirt den Ueberrest HV in R, und errichtet darauf die Senkrechte RS bis VJ, so wird S der Mittelpunkt, und SR der Radius des dritten Kreises, der den Forderungen der Aufgabe entspricht.

Ist das Dreieck gleichseitig [Fig. 11.], so ist der Weg zur Lösung des Problems sehr leicht, da alle drei Kreise gleich werden müssen. Man halbirt alle Winkel des Dreiecks durch die Geraden AC, BC, VC, die im Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises zusammen treffen. Die Gerade VC wird bis auf die Grundlinie in J verlängert, und JS = AJ gemacht, dann beschreibt man um den Mittelpunkt C mit dem Radius CS einen Kreis, der die Halbirungslinie in K und O schneidet; S, K, O werden dann die Mittelpunkte der gesuchten gleichen Kreise sein, fällt man von diesen Senkrechte auf die Seiten, so sind die Berührungspunkte der Kreise mit den Seiten des Dreiecks R, T, P, Q, M, Z bestimmt, und es bleibt nur noch zu beweisen, dass sie sich unter

einander berühren, und dass die Geraden SK, KO, SO doppelt so gross sind, als der Radius RS. Dieses sehr einfache Verfahren hat der Bürger Luigi Gozzi angegeben, mein Schüler und ein den Studien sehr eifrig ergebener Jüngling, der für die mathematischen und hydrostatischen Wissenschaften, denen er sich widmet, sehr günstige Erwartungen erregt. Der Beweis ist folgender. Wegen der Gleichheit der Winkel AVC und VAC sind auch die Seiten AC und VC gleich, und durch die gleiche Construction für die Radien CS und CK, wird SK parallel mit AV sein; wird sie bis zur Grundlinie nach N verlängert, so werden, weil $AJ = JS$ gemacht ist, die Winkel NSJ und CAJ und daher auch die Dreiecke SNJ, ACJ gleich sein müssen, also auch $JC = NJ$ und ebenso die Ueberreste AN, SC; daraus ergiebt sich nun die Gleichheit der Dreiecke AKN, SKC und der Geraden AK, KS. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AKT und VAJ aber folgt dass KT die Hälfte von AK, wie AJ die Hälfte von AV ist; und deshalb müssen die Kreise, welche um die Punkte K, S beschrieben sind, sich im Mittelpunkte der Linie KS berühren, was auch bei den Kreisen eintreten muss, welche um S, und O beschrieben sind. Weil ferner der Winkel KSO dem Winkel des gleichseitigen Dreiecks gleich ist, wird KSO gleichseitig sein müssen, und also wird auch die Gerade KO, welche von SJ in L halbirt wird, den Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise an der Grundlinie in eben diesem Punkte L enthalten.

Um nun im Allgemeinen dem Künstler das Verfahren anzugeben, nach welchem er ein Prisma in drei Stücke, deren jedes seinen eignen Cylinder enthält, theilen kann, wird es genügen, wenn er auf beiden Grundflächen von den Berührungspunkten der correspondirenden Kreise nach den Seiten die Tangenten der eingeschriebenen Kreise zieht. Dies sind die Richtungen, nach denen das Prisma zerschnitten werden muss, wobei nur die Stellen, wo sie sich innerhalb der Fläche des Dreiecks berühren, genau in Acht zu nehmen sind.

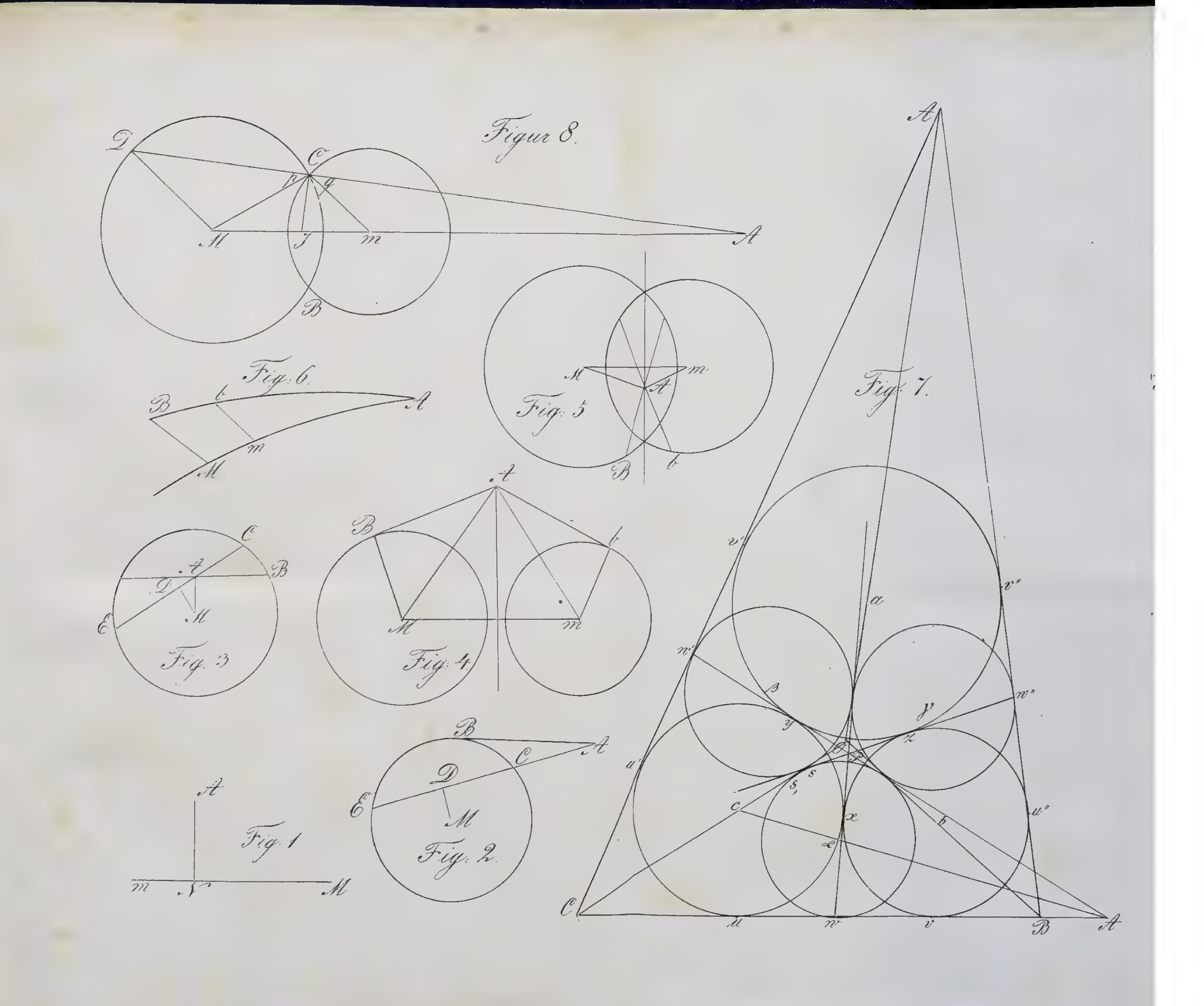
Bei dieser Gelegenheit füge ich einen sehr eleganten Beweis eines unserer trigonometrischen Sätze für das Verfahren hinzu, dessen sich Practiker zur Messung des Flächeninhalts eines Dreiecks bedienen, von denen die Seiten, ohne dass zuvor die Höhe gefunden wird, gegeben sind. Das bekannte Verfahren ist dieses: Man nimmt die Hälfte des Umfanges, dann die Hälfte des Umfanges weniger der einen Seite, die Hälfte des Umfanges weniger der andern Seite, die Hälfte des Umfanges weniger der dritten Seite, diese vier Grössen werden mit einander multiplizirt und nun soll die Quadratwurzel dieses Productes gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks sein.

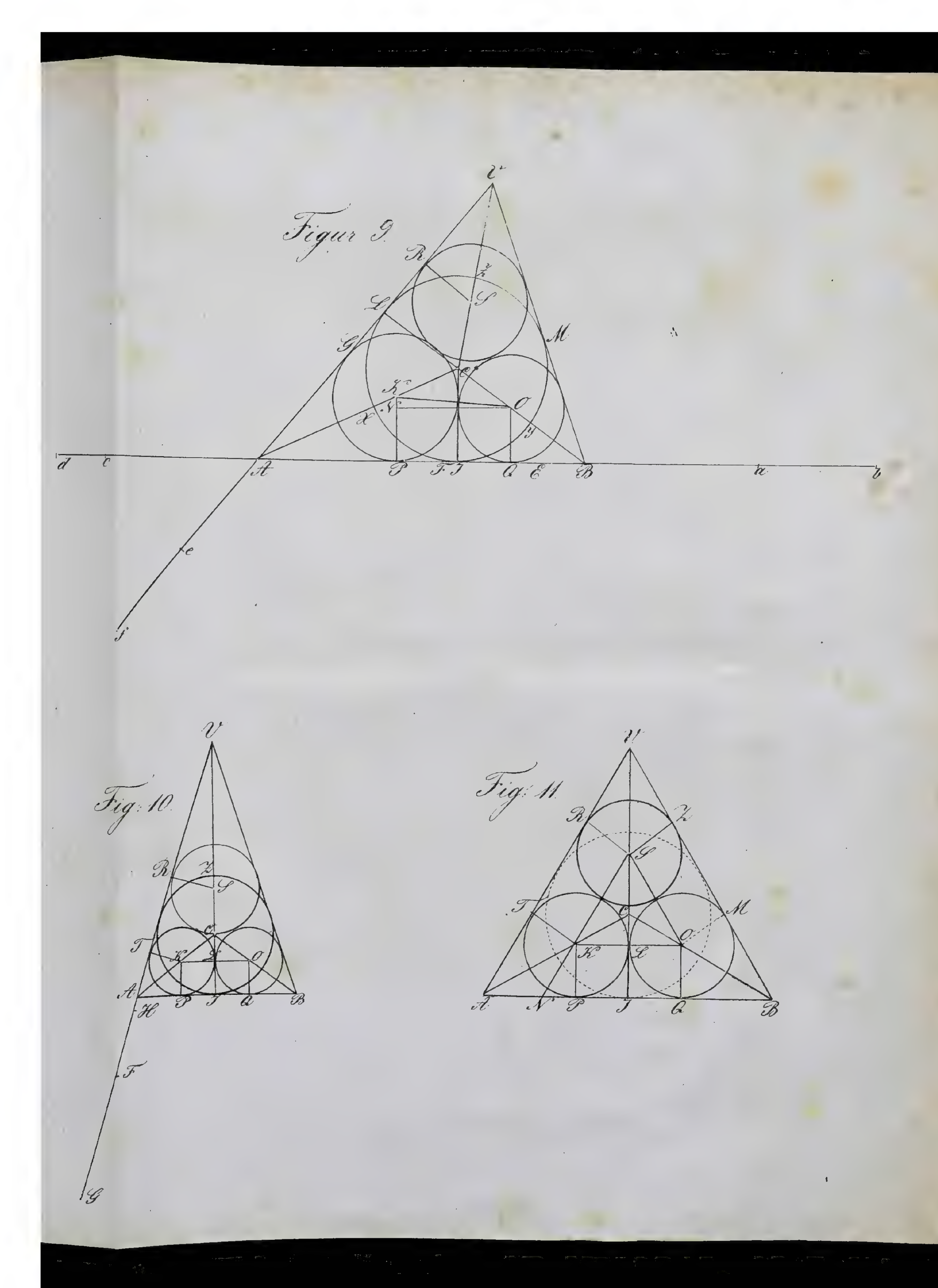
Ein einfacher Beweis der obigen Regel ist mir bis jetzt nicht vorgekommen, der folgende ist höchst einfach. Man zeichne in das Dreieck einen Kreis, dessen Mittelpunkt in C liegt, und fälle von C auf die Seiten des Dreieck's die senkrechten Radien CJ, CL, CM. Wenden wir nun die Buchstaben unserer Aufgabe an, so dass $AJ = s$, $BJ = t$, $VL = u$, und der Radius $CJ = r$ ist, so wird $s + t + u$ der halbe Umfang des Dreiecks; der halbe Umfang weniger der Seite BV ist $= s$, der halbe Umfang weniger der Seite $AV = t$, der halbe Umfang

weniger der Seite AB = u. Nach der Vorschrift soll nun $\sqrt{(s+t+u)\,s.t.u}$ gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks sein. Dies wird auf folgende Weise klar: Aus der obigen Formel (2.) erhalten wir $s.t.u = r^2\,(s+t+u)$ und daraus:

$$\sqrt{(s+t+u)\,.\,s.t.u} = \sqrt{(s+t+u)\,r^2\,(s+t+u)} = r.\,(s+t+u).$$

Weil aber $s+t+u$ gleich dem halben Umfang ist, so ergiebt sich $r\,(s+t+u)$ = dem Flächeninhalte des Dreiecks, und es wird also $\sqrt{(s+t+u)\,s.t.u}$ jenem Flächeninhalte gleich sein müssen.


Figur 8.
D
C
p
q
M
J
m
A
B
Fig. 6.
B
b
A
m
M
Fig. 5
M
m
A
B
b
Fig. 7.
A
v'
v''
a
w'
β
γ
w''
y
z
u'
s,
s
c
x
u''
b
C
u
w
v
B
A
C
B
A
D
M
E
Fig. 3
A
B
b
M
m
Fig. 4
B
A
D
C
E
M
Fig. 2.
A
Fig. 1
m
N
M


Figur 9.
Fig: 10.
Fig: 11.


BIB
CO
M
S
Fond